CHAPITRE 05 : PROBABILITÉS 1

HEI 2 - 2015/2016 - A. RIDARD

Prérequis :

- Probabilités niveau Lycée

Table des matières

I. Probabilités

1. Un peu de vocabulaire pour commencer

Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsque son résultat n'est pas connu à l'avance.
On note alors Ω l'ensemble des résultats possibles appelé **univers**.

Dans ce cours, Ω désignera un ensemble dénombrable [1]. Le cas d'un ensemble fini [2] fera l'objet de remarques.

L'ensemble des parties de Ω est notée $\mathscr{P}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés des **événements**.
On dit alors que le couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**.

Remarque. Dans le cas dénombrable, $\mathscr{P}(\Omega)$ est en fait un cas particulier de tribu sur Ω car elle est non vide et stable par complémentarité [3] et réunion dénombrable [4].

Si A est un événement, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A.
Ω est l'**événement certain** et $\varnothing$ l'**événement impossible**.
Deux **événements** A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.
$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'**événements incompatibles deux à deux** si pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on a : $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.
Un **système complet d'événements** est une partition de Ω c'est à dire une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements possibles [5] et incompatibles deux à deux telle que $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

2. Notion de probabilité

Définition (Probabilité)**.**

Une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est une application $\mathrm{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty[$ vérifiant :
- $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux, $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)$

Remarque. Si Ω désigne un ensemble fini, le deuxième point est remplacé par :
- Si A et B sont des événements **incompatibles**, alors $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

Exemple. Etant donné un ensemble fini Ω, la probabilité uniforme sur Ω est définie par : $\mathrm{P}(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Définition (Espace probabilisé)**.**

Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, on dit que le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ est un espace probabilisé.

Pour la suite de ce cours, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbf{P})$.

Propriété (Propriétés élémentaires)**.**

- $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$
- Si A et B sont des événements **incompatibles**, alors $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

  De même, si $A_0, \dots, A_n$ sont des événements **deux à deux incompatibles**, alors $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{P}(A_k)$
- Pour tout événement A, on a :
  - $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$
  - $\mathrm{P}(A) \in [0, 1]$
- Pour tout événement A et B, on a :
  - $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
  - $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

---

[1]. En bijection avec $\mathbb{N}$ donc indexable par $\mathbb{N}$: $\Omega = \{x_0, x_1, \dots\} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
[2]. En bijection avec une partie finie de $\mathbb{N}$ donc indexable par $[\![0, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}$: $\Omega = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
[3]. $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \overline{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$
[4]. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dans $\mathscr{P}(\Omega)$
[5]. $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$

3. Continuité monotone

Propriété (Continuité croissante)**.**

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante** [a] d'événements, alors $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$

Corollaire.

Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)$.

Propriété (Continuité décroissante)**.**

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante [a] d'événements, alors $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$

Corollaire.

Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right)$.

Exemple.
On lance une infinité de fois un dé équilibré.
Déterminons la probabilité de ne jamais obtenir 6.
Pour cela, notons A_n l'événement « ne pas obtenir 6 lors du n-ième lancer ».

En supposant les lancers indépendants [6], on a : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Par continuité décroissante (corollaire), il vient alors : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 0$.

La probabilité de ne jamais obtenir 6 est donc nulle.
Cet événement est-il impossible ?

4. Événements négligeables et presque sûrs

Définition (Événements négligeables et presque sûrs)**.**

Soit A un événement.
On dit que A est négligeable si $\mathrm{P}(A) = 0$.
On dit que A est presque sûr si $\mathrm{P}(A) = 1$.

Exemple. En lançant une infinité de fois un dé équilibré, "ne jamais obtenir 6" est un événement négligeable.
Donner un événement presque sûr.

Propriété (Réunion d'événements négligeables)**.**

Une réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

[6]. La notion d'événements indépendants sera formalisée plus loin

II. Probabilités conditionnelles et indépendance

1. Notion de probabilité conditionnelle

Définition (Probabilité conditionnelle)**.**

Soit B un événement non négligeable.
La probabilité conditionnelle sachant B d'un événement A est définie par :

$$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Remarques.
- P_B est une probabilité !
- Si B est négligeable, on convient de poser $\mathrm{P}(A|B) = 0$

Propriété (Formule des probabilités composées)**.**

Si A et B sont des événements, alors $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$.
Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors $\mathrm{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1\cap A_2)\dots\mathrm{P}(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$.

Exemple (Cas fini)**.**
Une urne contient n boules blanches et n boules rouges.
On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne.
Déterminons la probabilité qu'une boule rouge figure dans ce tirage en mesurant l'événement contraire.
Pour cela, notons A_k l'événement « la boule obtenue lors du k-ième tirage est blanche ».

La formule des probabilités composées fournit : $\mathrm{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

La probabilité qu'une boule rouge figure dans ce tirage est donc : $\mathrm{P}(\overline{A_1}\cup\cdots\cup\overline{A_n}) = 1 - \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

Exemple (Cas dénombrable)**.**
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.
On tire successivement des boules dans cette urne. A chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule de la même couleur.
Montrons que la boule rouge initiale sera presque sûrement tirée en mesurant l'événement contraire.
Pour cela, notons A_n l'événement « la boule tirée au n-ième tirage est blanche ».

La formule des probabilités composées fournit : $\mathrm{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) = \dfrac{1}{n+1}$.

Par continuité décroissante (corollaire), il vient donc : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 0$.

Autrement dit, l'événement « toutes les boules tirées sont blanches » est négligeable d'où le résultat.

Propriété (Formule des probabilités totales)**.**

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements.
Si B est un événement, alors $\mathrm{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(B|A_i)\mathrm{P}(A_i)$.

Exemple (Cas fini)**.**
On dispose de six urnes numérotées de 1 à 6.
L'urne numéro k comporte k boules blanches et une boule rouge.
Un joueur lance un dé équilibré puis choisit une boule dans l'urne correspondant au résultat du dé.
Déterminons la probabilité que la boule tirée soit blanche.
Pour cela, notons A_k l'événement « le dé donne la valeur k » et B l'événement « la boule tirée est blanche ».

En remarquant que $(A_1, \dots, A_6)$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales fournit :

$$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{k+1} = \frac{617}{840}$$

Exemple (Cas dénombrable)**.**
Une urne contient une boule rouge.
Un joueur lance un dé équilibré.
S'il obtient 6, il tire une boule dans l'urne. Sinon, il rajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation.
En notant A_0 l'événement « le joueur ne fait jamais 6 », remarquons déjà que A_0 est négligeable mais pas impossible (pourquoi ?).
Déterminons alors la probabilité que la boule rouge soit tirée.
Pour cela, notons A_n l'événement « le joueur fait son premier 6 lors du n-ième lancer » et B l'événement « la boule tirée est rouge ».

En supposant les lancers indépendants [7], on a : $\mathrm{P}(A_n) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$.
En remarquant que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales fournit alors :

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6n}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

Pourquoi cette somme est-elle bien définie ?

Propriété (Formule de Bayes)**.**

Si A et B sont deux événements non négligeables, alors $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$.

Corollaire.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements et B un événement non négligeable.
Pour tout $k \in I$, $\mathrm{P}(A_k|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}{\sum\limits_{i\in I}\mathrm{P}(B|A_i)\mathrm{P}(A_i)}$.

Remarque. La formule de Bayes est utile pour les raisonnements « rétroactifs ». Si on sait mesurer la conséquence B d'un événement A et que l'on sait l'événement B réalisé, la formule de Bayes permet de savoir si l'événement A l'a été. On parle parfois de la formule de probabilité des causes.

Exemple (Cas fini)**.**
Une urne contient deux dés : l'un est équilibré et l'autre donne systématiquement un 6.
On choisit un dé dans l'urne et on le lance.
En supposant que le dé lancé donne un 6, déterminons la probabilité que ce dé soit équilibré.
Pour cela, notons A l'événement « le dé choisi est équilibré » et B l'événement « le dé lancé donne un 6 ».
On veut donc mesurer $\mathrm{P}(A|B)$.

La formule de Bayes fournit : $\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{7}$

2. Événements indépendants

Définition (Indépendance de deux événements)**.**

On dit que deux événements A et B sont indépendants si $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

Remarques.
- Soit B un événement non négligeable. Alors,
  A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$ autrement dit, savoir que B est réalisé n'apporte rien pour mesurer A.
- Si A et B sont des événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi, tout comme $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exemples.
- On lance deux fois le même dé (équilibré ou non).
  Les événements « le premier lancer donne un six » et « le second lancer donne un six » sont indépendants.
- On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 5 boules blanches et 2 boules rouges.
  Les événements « la première boule tirée est blanche » et « la seconde boule tirée est blanche » ne sont pas indépendants.
  En revanche, si l'on procède à un tirage avec remise, ces événements deviennent indépendants.

⚠ Ne pas confondre indépendance et incompatibilité

[7]. La notion d'événements indépendants sera formalisée plus loin

Définition (Indépendance mutuelle d'événements)**.**

On dit que les événements d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants si pour tout J finie $\subset I$, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathrm{P}(A_j)$$

Remarque. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, alors :
- toute sous-famille $\left(A_j\right)_{j\in J}$ avec $J \subset I$ l'est aussi.
- toute famille $\left(A_i^{\epsilon_i}\right)_{i\in I}$ avec $A_i^{\epsilon_i} \in \{A_i, \overline{A}_i\}$ l'est aussi.

Exemple.
On lance indéfiniment une pièce (équilibrée ou non).
Déterminons la probabilité que face apparaisse pour la première fois lors du n-ième lancer.
Pour cela, notons :
- B l'événement « obtenir face pour la première fois lors du n-ième lancer »
- A_k l'événement « obtenir face lors du k-ième lancer »
- $p \in]0,1[$ la probabilité d'obtenir face à chaque lancer

Les lancers étant indépendants, les événements de la famille $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants donc les événements $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_{n-1}}, A_n$ le sont aussi (remarque précédente). Par conséquent, on a :

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = \mathrm{P}(\overline{A_1}) \dots \mathrm{P}(\overline{A_{n-1}})\mathrm{P}(A_n) = (1-p)^{n-1} p$$

⚠ Des événements deux à deux indépendants ne sont pas, en général, mutuellement indépendants :

On lance deux dés discernables et l'on considère les événements :
- A « le premier dé lancé donne un résultat pair »
- B « le second dé lancé donne un résultat pair »
- C « la somme des deux dés est paire »

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants (pourquoi ?).

III. Variables aléatoires

1. Notion de loi de probabilité

Définition (Variable aléatoire)**.**

On appelle variable aléatoire (v.a.) discrète toute application $X : \Omega \to E$ vérifiant :
- l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable
- $\forall x \in X(\Omega),\ X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\} \in \mathscr{P}(\Omega)$

Remarques.
- L'appellation variable aléatoire est usuelle bien que malheureuse. En effet, X n'est pas une variable, mais bien une fonction et celle-ci n'est pas aléatoire, mais plutôt déterministe. Ce sont les valeurs prises par X qui correspondent à des quantités qui vont varier selon le résultat de l'expérience aléatoire.
- Il est fréquent de manipuler des variables aléatoires sans même avoir précisé l'espace probabilisé d'étude.

Définition (Loi de probabilité)**.**

On appelle loi de la v.a. $X : \Omega \to E$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{P}_X : & \mathscr{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathrm{P}(X \in A) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}) \end{array}$$

Remarque. P_X est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathrm{P}(X(\Omega)))$

Propriété.

La loi de la v.a. $X : \Omega \to E$ est entièrement déterminée par :
- $X(\Omega)$ (les valeurs possibles)
- $\forall x \in X(\Omega),\ p_x = \mathrm{P}(X = x)$ (pour chacune des valeurs possibles, la probabilité associée)

On a alors : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} p_x = 1$

2. Lois usuelles

Définition (Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$)**.**

On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$ si :
- $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$
- $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{n}$

Remarque. La loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$ modélise le lancer d'un dé équilibré.

Définition (Loi de Bernouilli)**.**

On dit que X suit une loi de Bernouilli de paramètre p, et l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ si :
- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\mathrm{P}(X = 1) = p$ et $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p = q$

Remarque. La loi de Bernouilli modélise une expérience aléatoire à deux issues possibles (succès et échec) comme par exemple le lancer d'une pièce (équilibrée ou non). Son paramètre désigne alors la probabilité de succès.

Définition (Loi binomiale).

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, et l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ si :
- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Remarque. La loi binomiale de paramètres n et p modélise le nombre de succès à l'issue de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire à deux issues possibles, de probabilité de succès p.

Définition (Loi géométrique).

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, et l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ si :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

Remarque. La loi géométrique de paramètres p modélise le nombre de répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire à deux issues possibles, de probabilité de succès p, jusqu'à l'obtention du premier succès.

Définition (Loi de Poisson).

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ si :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Remarque (Approximation d'une Binomiale par une Poisson).
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. avec $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$.
Si $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$, alors $\mathrm{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Une loi de Poisson de paramètre λ modélise ainsi le nombre d'occurrences d'un phénomène "rare" durant un laps de temps T si, pendant ce laps de temps, il se produit en moyenne λ fois.